1. Μετρικοί Χώροι- Ασκήσεις

Άσκηση 1
Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και η $1-1$ πραγματική συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\hat{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\hat{d}(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|,\ x, y \in X$ είναι μία μετρική του X.

Άσκηση 2
Έστω $d\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = |e^x - e^y|,\ x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι η d είναι μία μετρική στον $\mathbb{R}$.

(ii) Να εξετάσετε ποια από τα σύνολα:

(a) $A = (-\infty, -1)$

(b) $B = (-2, 2)$

(c) $C = (3, +\infty)$

είναι φραγμένα ως προς τη μετρική d.

Άσκηση 3
Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $d(n, m) = \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + 1 & , \quad n \neq m \\ 0 & , \quad n = m \end{cases}$, είναι μία μετρική του $\mathbb{N}$.

Άσκηση 4
Εάν d_1, d_2, d_3 είναι μετρικές ενός συνόλου X, εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους $d := d_1 + d_2$, $\sigma := \max\{d_1, d_2\}, \tau := \min\{d_1, d_2\}$ και $\rho := {d_3}^2$ είναι μετρικές του X.

Άσκηση 5
Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\operatorname{diam}(A) = 0$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή A μονοστοιχειακό σύνολο.

(ii) αν $A \subset B \subset X$, τότε $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

(iii) αν $A, B \subset X$, τότε

$$\operatorname{diam}(A \cap B) \leq \min\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\} \leq \max\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\} \leq \operatorname{diam}(A \cup B).$$

Αποδείξτε ότι είναι ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός:

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

Με την προσθήκη ότι $A \cap B \neq \emptyset$, εξετάστε αν ισχύει η παραπάνω ανισότητα.

(iv) Εάν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n} 0$, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι είτε κενό, είτε μονοστοιχειακό.

Άσκηση 6
Θεωρούμε το χώρο S όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω η ακολουθία $(m_n)_{m\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $(0,+\infty)$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} m_n < +\infty$. Ορίζουμε την απεικόνιση $d : S \times S \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|},\ \ x=(x(n))_{n\in\mathbb{N}}, y=(y(n))_{n\in\mathbb{N}} \in S.$$

Να αποδείξετε ότι ο (S,d) είναι μετρικός χώρος και να βρείτε τη διάμετρο αυτού.

Άσκηση 7
Αποδείξτε ότι στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ η απόσταση μεταξύ των συνόλων $A=[0,1)$ και $B=(1,2]$ είναι μηδέν παρόλο που είναι ξένα μεταξύ τους.

Άσκηση 8
Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος, $x_0 \in X$ και $x \in X \setminus B_d(x_0,r)$, $r>0$. Να αποδείξετε ότι $d(x, B_d(x_0,r)) \geq d(x_0,x) - r$. Ισχύει γενικά η ισότητα;

Άσκηση 9

(i) Ορίζουμε την απεικόνιση $d\colon\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$d((a,b),(c,d)) = \begin{cases} |b-d| & ,\ \ a=c \\ |b|+|a-c|+|d| & ,\ \ a\neq c \end{cases},$$

Να αποδείξετε ότι η d ορίζει μια μετρική στο $\mathbb{R}^2$.

(ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις μεταξύ των συνόλων:

(a) $A=\mathbb{R}\times\{0\}$ και $B=\{(x,y) : y=\frac{1}{x}, x>0\}$ στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

(b) $A=\mathbb{N}$ και $B=\{n+\frac{1}{2^n} : n\in\mathbb{N}\}$ στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(c) $A=\{(0,1)\}$ και $B=\{(x,1) : x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ στον χώρο $(\mathbb{R}^2, d)$, όπου d η μετρική του ερωτήματος (i).

Υποδείξεις Ασκήσεων

Άσκηση 1
Ευκολα μπορείτε να αποδείξετε τις ιδιότητες 1,2,3 του ορισμού μιας μετρικής.

Άσκηση 2

(i) Εύκολα εξετάζοντας τις τρεις ιδιότητες του ορισμού και επειδή η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι 1-1, προκύπτει εύκολα ότι η d είναι μία μετρική στον $\mathbb{R}$.

(ii) Θυμίζουμε ότι για τυχόν σύνολο D σε ένα μετρικό χώρο (X,d) η διάμετρος ορίζεται να είναι ο αριθμός $\mathrm{diam}(D) := \sup\{d(x,y) : x,y\in D\}$.

(a) Για κάθε $x, y < -1$, ισχύει: $|e^x - e^y| \leq e^x + e^y < e^{-1} + e^{-1} = \dfrac{2}{e}$. Άρα, $\mathrm{diam}(A) < +\infty$.

(b) Για κάθε $x, y \in (-2, 2)$, έχουμε $e^{-2} < e^x < e^2$ και $e^{-2} < e^y < e^2$. Οπότε, αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις έπεται ότι $|e^x - e^y| \leq e^2 - e^{-2}$. Άρα, $\mathrm{diam}(B) < +\infty$.

(c) Για κάθε $x \geq 4$, ισχύει: $\mathrm{diam}(C) \geq |e^x - e^4| = e^x - e^4$, όπου παίρνοντας όριο για $x \to +\infty$ έχουμε ότι $\mathrm{diam}(C) = +\infty$.

Άσκηση 3

Εύκολα αποδεικνύει κανείς τις ιδιότητες 1 και 2 του ορισμού μιας μετρικής και για την ιδιότητα 3 (δηλαδή, την τριγωνική ανισότητα), θεωρούμε τρεις τυχαίους φυσικούς αριθμούς n, m και k, και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) $n = m = k$

(ii) $n = m \neq k$

(iii) $n = k \neq m$

(iv) $n \neq k = m$

(v) $n \neq m \neq k \neq n$

Άσκηση 4

Έυκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι οι d και σ είναι μετρικές του X, αποδεικνύοντας μία προς μία τις ιδιότητες 1,2 και 3 που πρέπει να έχει μια μετρική. Εντούτοις, οι τ και ρ δεν είναι μετρικές X. Πραγματικά, για την πρώτη αν θεωρήσουμε στο $(0, +\infty)$ τις μετρικές $d_1(x, y) = |x - y|$ και $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$ (η d_2 είναι η μετρική (αποδείξτε το) που επάγεται από την $1-1$ συνάρτηση $f(x) = x^2, x > 0$). Η τριγωνική ανισότητα δεν ισχύει για την τριάδα $x = 0, y = \dfrac{1}{2}$ και $z = 2$, δηλαδή, $\tau(0, 2) = 2 > \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} = \tau(0, \dfrac{1}{2}) + \tau(\dfrac{1}{2}, 2)$.. Για τη δεύτερη επιλέγοντας τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d = |\cdot|$, η $\rho = |\cdot|^2$ δεν είναι μετρική καθώς δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα για την τριάδα $x = 0, y = 1$ και $z = 2$.

Άσκηση 5

(i) Είναι προφανές από τον ορισμό της διαμέτρου.

(ii) Έπεται άμεσα αφού η διάμετρος ορίζεται ώς ένα supremum.

(iii) Αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι $A \cap B \subset A, B$ και $A, B \subset A \cup B$ και έπειτα κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων του supremum. Όσο για την ανισότητα $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$ δεν ισχύει, γιατί επιλέγοντας οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) με τουλάχιστον δύο στοιχεία $x \neq y$ για $A := \{x\}$ και $B := \{y\}$ συνάγουμε ότι $\mathrm{diam}(A \cup B) = d(x, y) > 0 = \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$. Αν προσθέσει κανείς ότι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε η παραπάνω ανισότητα ισχύει (γιατί;)

(iv) Έστω $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A_n) \geq d(x, y) > 0$, $\forall n$. Συνεπώς, παίρνοντας όρια για $n \to +\infty$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 6

Άρχικά η d είναι καλά ορισμένη, γιατί $d(x,y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_k < +\infty$. Αυτό συνεπάγεται και το γεγονός ότι $\operatorname{diam}(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_k$. Εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι όντως d μετρική εξετάζοντας τις ιδιότητες του ορισμού. Τέλος, θεωρώντας τα στοιχεία $x_M = (M, M, \ldots, M, \ldots)$, $M > 0$ και $y = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ έχουμε $\operatorname{diam}(S) \geq d(x_M, y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_k \frac{M}{1+M} = \frac{M}{1+M} \sum_{n=1}^{\infty} m_k$. Παίρνοντας όρια για $M \to +\infty$ συνάγουμε ότι $\operatorname{diam}(S) = \sum_{n=1}^{\infty} m_k$.

Άσκηση 7

Προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι $d([0,1),(1,2]) = \varepsilon > 0$ και επιλέγοντας ως $x = 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ και $y = 1 + \frac{\varepsilon}{3}$, προκύπτει ότι $d(x,y) = \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 8

Έστω $y \in B_d(x_0, r)$. Άρα, $d(x,y) \geq d(x,x_0) - r$ (γιατί;) και προκύπτει το ζητούμενο. Ένα αντιπαράδειγμα για την ισότητα είναι ο διακριτός μετρικος χώρος και μία μπάλα σε αυτόν ακτίνας $\varepsilon = 1$.

Άσκηση 9

(i) Η απεικόνιση $d \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$d((a,b),(c,d)) = \begin{cases} |b-d| & , \quad a = c \\ |b| + |a-c| + |d| & , \quad a \neq c \end{cases},$$

είναι καλά ορισμένη δηλαδή λαμβάνει μη αρνητικές τιμές. Ευκολα κανείς εξετάζει τις δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού μιας μετρικής. Όσο για την τριγωνική ανισότητα θα πρέπει να εξετασθεί κατά περιπτώσεις. Δηλαδή, για τυχαία $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ τις περιπτώσεις:

(1) $a = c = e$

(2) $a \neq c = e$

(3) $a = e \neq c$

(4) $a = c \neq e$

(5) $a \neq c \neq e \neq a$ Όλες εξετάζονται εύκολα και για αυτό αφήνονται σαν εξάσκηση.

(ii) (a) Για κάθε $x > 0$, $0 \leq d_2(A,B) \leq d_2\left((x, \frac{1}{x}), (x, 0)\right) = \frac{1}{x}$. Παίρνοντας όριο για $x \to +\infty$ από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων παίρνουμε ότι $d_2(A,B) = 0$.

(b) Το σκεπτικό είναι ανάλογο του ερωτήματος (a), και η ζητούμενη απόσταση ισούται με μηδέν.

(c) Είναι $d(A,B) = \inf\{d((x,1),(0,1) : x \neq 0\} = \inf\{2 + |x| : x \neq 0\} = 2$.